Тема 8. Типовые динамические звенья и их характеристики: апериодическое звено 1-го порядка, колебательное звено, звено запаздывания

Апериодическое (инерционное) звено.

Апериодическим называют звено, которое описывается уравнением

$$T\frac{dy}{dt}+y=kx,$$

где Т – постоянная времени; к – коэффициент передачи звена.

Примером звена может служить ранее рассмотренный резервуар со свободным стоком жидкости.

Передаточная функция звена

$$W(p)=\frac{k}{Tp+1}.$$

Переходная характеристика звена представляет собой экспоненциальную кривую (рисунок 8.1), описывающуюся уравнением

$$h(t)=k(1-e^{-t/T}).$$

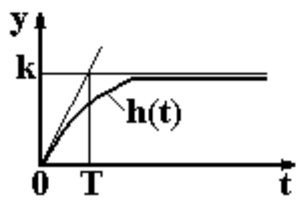

Рисунок 8.1

Частотные характеристики звена определяются уравнениями:

$$W(j\omega)=\frac{k}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}e^{-jatctg(\omega T)};\qquad A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{1+(T\omega)^2}};$$

$$\varphi(\omega)=-arctg(\omega T);\qquad L(\omega)=20\lg k-20\lg\sqrt{1+(\omega T)^2}$$

и показаны на рисунке 8.2.

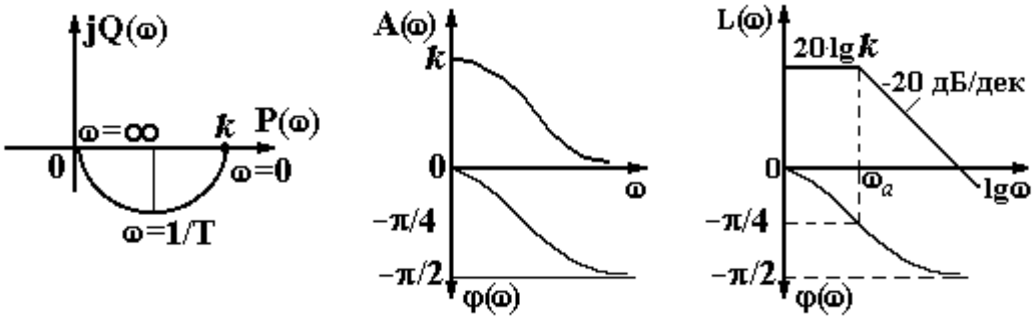

Рисунок 8.2

АФХ апериодического звена при изменении частоты от 0 до ∞ представляет собой полуокружность диаметром k. Максимальный фазовый сдвиг в звене $\varphi(\omega)=-90^0$. ЛАЧХ звена проходит на уровне $20{\cdot}\lg k$ до сопрягающей частоты $\omega_a=1/T$, после которой принимает наклон –20 дБ/дек. ЛФЧХ звена ассимптотически стремится к $\pi/2$ при $\omega\to\infty$. При $\omega=\omega_a$ фазо-частотная функция $\varphi(\omega_a)=-\pi/4$.

Колебательное, консервативное и апериодическое второго порядка звенья.

К таковым относят звенья, которые описываются уравнением

$$T^2\frac{d^2y}{dt^2}+2\xi T\frac{dy}{dt}+y=kx$$

где ξ - коэффициент демпфирования, величина которого определяет свойства звена.

Свойствами таких звеньев может обладать показанная на рисунке 8.3 динамическая система, в которой груз массой m, подвешенный на пружине с коэффициентом упругости k, может перемещаться в опорах с коэффициентом трения f.

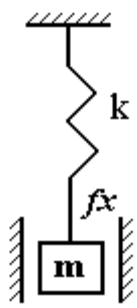

Рисунок 8.3

Характер переходного процесса в системе определяется корнями характеристического уравнения

$$T^2p^2+2\xi Tp+1=0. \qquad (8.1)$$

Корни этого уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm \sqrt{\left(\frac{\xi}{T}\right)^2 - \frac{1}{T^2}} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{1}{T}\sqrt{\xi^2 - 1},$$

откуда следует три случая.

1) Коэффициент демпфирования $\xi = 0$.
Тогда корни уравнения 8.1

$$p_{1,2} = \pm \frac{1}{T}\sqrt{-1} = \pm j\frac{1}{T}$$

чисто мнимые и на выходе звена будут незатухающие колебания с постоянной амплитудой (рисунок 8.4). Такое звено называют консервативным.

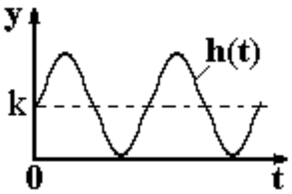

Рисунок 8.4

2) Коэффициент демпфирования $0 < \xi < 1$.
Тогда корни уравнения (8.1)

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm j\frac{1}{T}\sqrt{\xi^2 - 1} = -\alpha \pm j\omega$$

будут комплексные с отрицательной действительной частью. В этом случае переходный процесс будет колебательным затухающим (рисунок 8.5) и звено называют колебательным. Степень колебательности $m=\alpha/\omega$, а степень затухания переходного процесса

$$\Psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - e^{-2\pi m}.$$

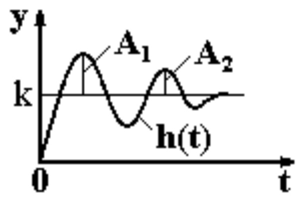

Рисунок 8.5

Колебательному характеру переходной характеристики соответствует наличие в АФХ и ФЧХ звена резонансного пика (рисунок 8.6).

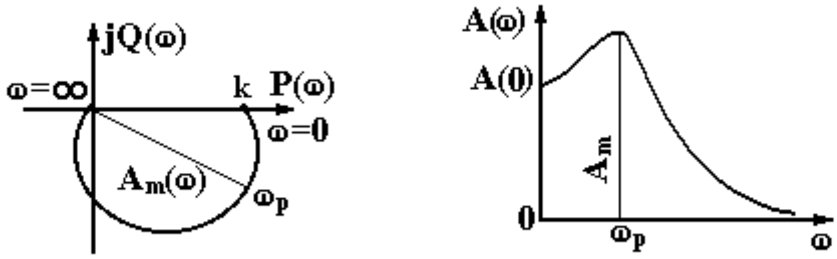

Рисунок 8.6

Отношение $m{=}A_m/A_{(0)}$ называют показателем колебательности.

Логарифмическая АЧХ звена проходит на уровне $20{\cdot}\lg k$ до сопрягающей частоты $\omega_a{=}1/T$. При частоте $\omega{>}\omega_a$ ЛАЧХ звена имеет наклон – 40 дБ/дек (рисунок 8.7).

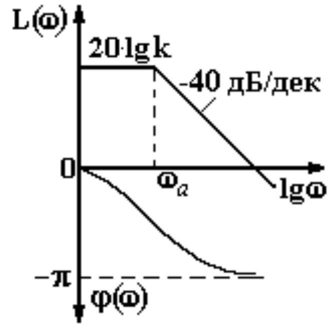

Рисунок 8.7

3) Коэффициент демпфирования $\xi{>}1$.

В этом случае корни характеристического уравнения (8.1) будут действительные отрицательные, т.е. $p_1 {=}{-}\alpha_1$, $p_2{=}{-}\alpha_2$ и переходный процесс в звене будет представляться кривой второго порядка, в связи с чем его называют апериодическим звеном второго порядка. Это звено не считается элементарным.

Запаздывающее звено.

Запаздывающим называют звено, описываемое уравнением $y(t)=x\cdot(t-\tau)$, где τ – время запаздывания. Коэффициент передачи запаздывающего звена принимается равным единице.

Примером запаздывающего звена может служить ленточный транспортер. Переходная характеристика звена показана на рисунке 8.8.

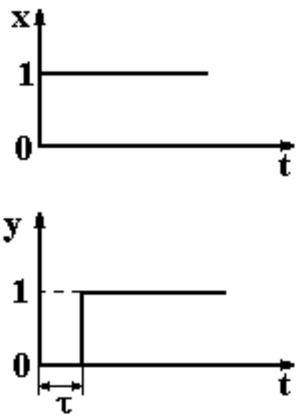

Рисунок 8.8

Для определения частотных характеристик звена рассмотрим следующие очевидные соотношения. Если на вход запаздывающего звена подавать гармонические колебания

$$\dot{x}(t) = Ae^{j\omega t},$$

то выходные колебания будут определяться выражением

$$\dot{y}(t) = Ae^{j\omega(t-\tau)}.$$

Тогда выражение для АФХ звена запишется следующим образом

$$W(j\omega) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{A}{A}e^{j\omega(t-\tau)}e^{-j\omega t} = \mathbf{1}e^{-j\omega\tau},$$

откуда получим выражение для передаточной функции звена $W(p) = e^{-p\tau}$.
По формуле Эйлера для АФХ звена найдем

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)$$

и, изменяя частоту ω от 0 до ∞, получим ее график, показанный на рисунке 8.9.

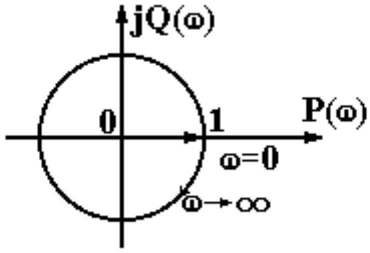

Рисунок 8.9

График АФХ представляет собой окружность единичного радиуса с центром в начале координат. При ω=0 вектор $A(\omega)$ совпадает с положительной вещественной полуосью. При бесконечном увеличении частоты вектор $A(\omega)$ бесконечное число раз оборачивается вокруг начала координат.

Другие частотные характеристики звена определяются выражениями

$$A(\omega)=1; \quad \varphi(\omega)=-\omega\tau; \quad L(\omega)=20\lg 1=0.$$